INTERROGATION DE PYTHON N°9

EXERCICE **10 points**

On considère la variable $W = -\ln(V)$ où V suit la loi exponentielle de paramètre 1.

1. (a) Compléter la fonction suivante permettant de simuler la variable W :

```
def simulW():
  return ..............................
```

(b) Expliquer ce que contient la variable `x` :

`x=[simulW() for _ in range (nbsim)]`

....

....

(c) Quelles commandes Python peut-on utiliser pour donner une estimation de l'espérance et de la variance de W à partir de `x` ? Utiliser Python pour donner une estimation de $E(W)$ et $V(W)$.

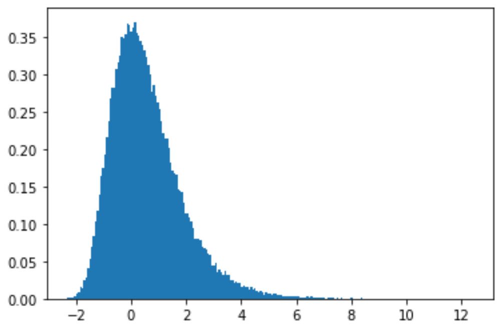
....

$E(W) \approx$ .... $V(W) \approx$ ....

(d) On considère le script suivant :

```
nbsim = 10 000
x=[simulW() for _ in range (nbsim)]
plt.hist(x,bins='auto')
plt.show()
```

Donnant le graphique suivant :



Expliquer ce que représente ce graphique :

....

....

....

....

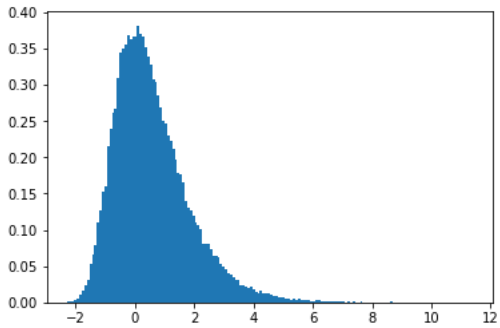
2. On considère $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de la loi exponentielle de paramètre 1.

   On note $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $T_n = M_n - \ln(n)$.

   (a) Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable T_n :

```
def simuleT(n):
  x = [ ...................................... for _ in range(n) ]
  M = np.max ( x )
   return ...............................
```

   (b) En prenant exemple sur le script de la question 1.d), écrire un script permettant d'afficher l'histogramme des fréquences associés à la simulation de `nbsim = 1000` fois la variable T_{100} permettant de produire le graphique suivant :




```
..............................................
..............................................
..............................................
.............................................
```

   (c) Que constate-t-on sur ce dernier graphique ? Comparer avec le graphique de la question 1.d)

   ....

   ....

3. On souhaite donner un intervalle de confiance pour $\mu = E(W)$.

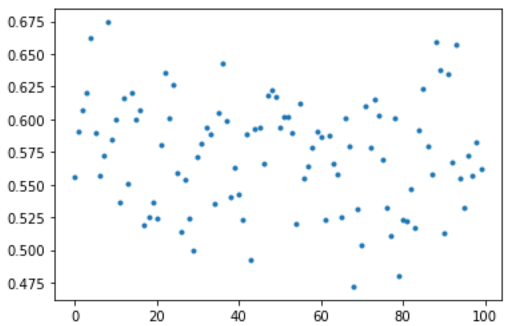
   Soit $(W_1, ..., W_n)$ un échantillon de W et $\overline{W_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} W_k$ la moyenne empirique de cet échantillon.

   (a) On rappelle que `np.sum(x)` renvoie la somme des éléments contenus dans la liste (ou matrice) `x`. Ecrire une fonction permettant de simuler la variable $\overline{W_n}$.

```
def Wnbarre(n):
  x = [ .......................... for _ in range (n) ]
  return ..........................
```

   (b) Le script suivant permettant d'afficher le graphique ci-contre :

```
n = 100
x=[Wnbarre(1000) for _ in range(100)]
plt.plot( x, '.' )
```



   Proposer par lecture graphique un intervalle de confiance pour μ pour un seuil de confiance de 95%.

   ....

INTERROGATION PYTHON N°9 : CORRECTION

EXERCICE **10 points**

On considère la variable $W = -\ln(V)$ où V suit la loi exponentielle de paramètre 1.

1.
```
def simulW():
  return .-np.log( rd.exponential(1) )
```

(b) La variable `x` contient une liste de `nbsim` simulations de la variable W

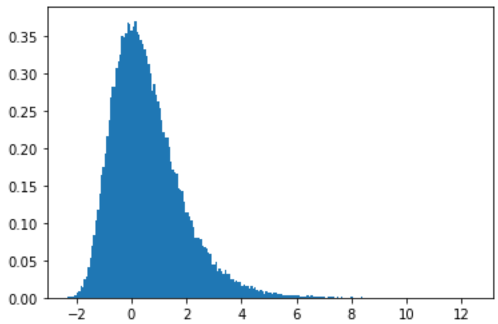
(c) Pour l'espérance `np.mean(x)`
Pour la variance `np.std(x)**2`
Avec `nbsim=1000` Python donne :

$$E(W) \approx 0,58. \qquad V(W) \approx 1,67$$

(d) On considère le script suivant :

```
nbsim = 10 000
x=[simulW() for _ in range (nbsim)]
plt.hist(x,bins='auto')
plt.show()
```

Donnant le graphique suivant :



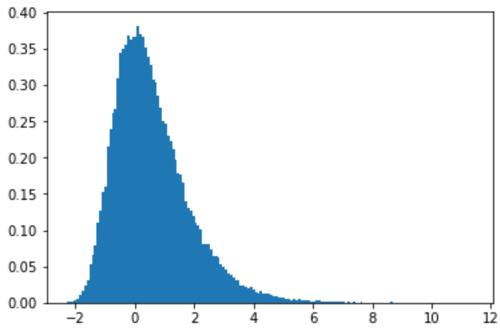
Le graphique montre l'histogramme des fréquences de la série statistiques `x=[simulW() for` ¡*nrange*(*nbsim*)]*associée*
La courbe ainsi décrite "approche" la d.d.p. de W (loi de Grumbel).
On constate un faible étalement des valeurs autour de la moyenne $\approx 0,58$, donc une variance $\approx 1,67$ relativement faible.

2. On considère $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de la loi exponentielle de paramètre 1.
   On note $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $T_n = M_n - \ln(n)$.

(a)

```
def simuleT(n):
  x = [ rd.expontenial(1) for _ in range(n) ]
  M = np.max ( x )
   return  M - np.log(n)
```

(b) En prenant exemple sur le script de la question 1.d), écrire un script permettant d'afficher l'histogramme des fréquences associés à la simulation de `nbsim = 50 000` simulations de la variable T_{100} permettant de produire le graphique suivant :



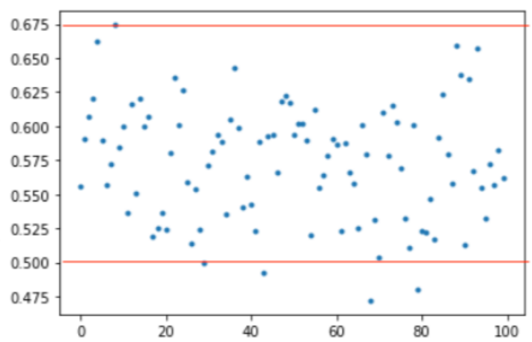

```
nbsim = 50000
x=[simulT(n) for _ in range (nbsim)]
plt.hist(x,bins='auto')
plt.show()
```

(c) On constate la ressemblance entre les deux graphiques mettant en évidence la convergence en loi de la suite $(T_n)_n$ vers W.

3. On souhaite donner un intervalle de confiance pour $\mu = E(W)$: soit $(W_1, ..., W_n)$ un échantillon de W et $\overline{W_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} W_k$ la moyenne empirique de cet échantillon.

```
def Wnbarre(n):
  x = [ simulW() for _ in range (n) ]
  return 1/n*np.sum(x)
```

(b) Le script suivant permettant d'afficher le graphique ci-contre :




```
n = 100
x=[Wnbarre(1000) for _ in range(100)]
plt.plot( x, '.' )
```

Proposer par lecture graphique un intervalle de confiance pour μ, pour un seuil de confiance de 95%.

On essaie de trouver un intervalle I_n pour lequel on a 5% des fréquences en dehors de cet intervalle.
Comme $n = 100$, il suffit de trouver un intervalle qui exclus 5 fréquences :

$$\Rightarrow \qquad I_n \approx [0,5; 0,675] \qquad \text{convient}$$